b) g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise un bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ et comme $0\in\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha\in\mathbf{R}$ par g et par conséquent il existe un seul réel α solution de l'équation $g(x)=0$.

c) On a : $\begin{cases} g(-\frac{1}{3})\cdot g(0)<0 \ \ et \\ g \text{ est continue sur } [-\frac{1}{3},0\,] \end{cases}$ donc $-\frac{1}{3}<\alpha<0$.

2°/ D'après le tableau de variations de g on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

d'où :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3°/a) on a $g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^3-\alpha^2+3\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2+3)=\alpha^2-1$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+3} \text{ d'où } h(\alpha)=\alpha.$$

b) h est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathrm{R}$,

$$h'(x)=\frac{2x(x^2+3)-2x(x^2-1)}{(x^2+3)^2}=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1